頁

第 9 單元　指數與對數及其運算

9－1 指數

9-2 範例 1 答 (1) **25**　(2) **1**

解 (1) 原式$=5^{-\frac{2}{5}}\times(5^{-4})^{-\frac{3}{5}}$

$=5^{-\frac{2}{5}}\times5^{\frac{12}{5}}=5^{-\frac{2}{5}+\frac{12}{5}}=5^2=25$

(2) 原式$=5^{(3a-2b)+(c+2b)+(-3a-c)}$

$=5^0=1$

練習 1 答 (1) $\frac{1}{7}$　(2) **1**

解 (1) 原式$=(7^{-5+(-6)-(-12)})^{-1}=7^{-1}=\frac{1}{7}$

(2) 原式$=7^{(a-b)+(b-c)+(c-a)}=7^0=1$

範例 2 答 (1) $-2-\sqrt{5}$　(2) $a^{\frac{9}{10}}$

解 (1) 原式$=(2+\sqrt{5})[(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})]^{19}$

$=(2+\sqrt{5})(-1)^{19}=-2-\sqrt{5}$

(2) 原式$=\frac{a^{\frac{7}{5}}}{\sqrt[3]{a^{\frac{6}{4}}}}=\frac{a^{\frac{7}{5}}}{a^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{7}{5}-\frac{1}{2}}=a^{\frac{9}{10}}$

練習 2 答 (1) $3-2\sqrt{2}$　(2) $\frac{a^2c^2}{b}$

解 (1) 原式$=[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})]^6\times(3-2\sqrt{2})$

$=(9-8)^6\times(3-2\sqrt{2})=3-2\sqrt{2}$

(2) 原式$=a^{\frac{6}{3}}(b^{-1}\times c^2)^{\frac{3}{3}}=a^2b^{-1}c^2=\frac{a^2c^2}{b}$

9-3 範例 3 答 **3**

解 ∵ $36^m=6^{n+3}\Rightarrow 6^{2m}=6^{n+3}$，即 $2m=n+3$…①

又 $2^{n+11}=8^{m+2}\Rightarrow 2^{n+11}=2^{3m+6}$，即 $n+11=3m+6$…②

由①，② ⇒ $m=2$，$n=1$

∴ $m+n=3$

練習 3 答 **−1**

解 ∵ $(5^2)^a=125^2\Rightarrow 5^{2a}=(5^3)^2=5^6\Rightarrow a=3$

又 $3^{a-2b}=\frac{1}{243}=3^{-5}\Rightarrow a-2b=-5$

⇒ $3-2b=-5\Rightarrow b=4$

∴ $a-b=3-4=-1$

範例 4 答 **−2**

解 利用 $a^x=b\Rightarrow(a^x)^{\frac{1}{x}}=b^{\frac{1}{x}}$，即 $a=b^{\frac{1}{x}}$

∵ $8^x=125=5^3\Rightarrow 8=5^{\frac{3}{x}}$…①

$200^y=25=5^2\Rightarrow 200=5^{\frac{2}{y}}$…②

$\frac{①}{②}\Rightarrow\frac{8}{200}=\frac{5^{\frac{3}{x}}}{5^{\frac{2}{y}}}\Rightarrow 5^{-2}=5^{\frac{3}{x}-\frac{2}{y}}$　∴ $\frac{3}{x}-\frac{2}{y}=-2$

練習 4 答 $\frac{1}{4}$

解 ∵ $15^x=81=3^4\Rightarrow 15=3^{\frac{4}{x}}$…①

$5^y=81=3^4\Rightarrow 5=3^{\frac{4}{y}}$…②

$\frac{①}{②}\Rightarrow\frac{15}{5}=\frac{3^{\frac{4}{x}}}{3^{\frac{4}{y}}}\Rightarrow 3=3^{\frac{4}{x}-\frac{4}{y}}$

即 $\frac{4}{x}-\frac{4}{y}=1$　∴ $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$

頁

範例 5 答 (1) **7**　(2) **18**

9-3 解 (1) $x+x^{-1}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2-2=3^2-2=7$

(2) $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}})^3+(x^{-\frac{1}{2}})^3=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3-3(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$

$=3^3-3\times3=18$

練習 5 答 (1) **11**　(2) **36**

解 (1) $a^{2x}+a^{-2x}=(a^x)^2+(a^{-x})^2=(a^x-a^{-x})^2+2a^xa^{-x}$

$=3^2+2=11$

(2) $a^{3x}-a^{-3x}=(a^x)^3-(a^{-x})^3$

$=(a^x-a^{-x})^3+3a^xa^{-x}(a^x-a^{-x})=3^3+3\times3=36$

範例 6 答 $\frac{13}{3}$

解 原式$=\frac{(a^x-a^{-x})(a^{2x}+1+a^{-2x})}{(a^x-a^{-x})}=a^{2x}+1+\frac{1}{a^{2x}}$

$=3+1+\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$

練習 6 答 $\frac{13}{4}$

解 原式$=\frac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-1+a^{-2x})}{(a^x+a^{-x})}$

$=a^{2x}-1+\frac{1}{a^{2x}}=4-1+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$

9－2 指數函數及其圖形

9-4 範例 1 答 $c<a<b$

解 由 $a=\sqrt[3]{0.16}=\sqrt[3]{(0.4)^2}=0.4^{\frac{2}{3}}=(0.4)^{\frac{8}{12}}$

$b=\sqrt{0.4}=(0.4)^{\frac{1}{2}}=(0.4)^{\frac{6}{12}}$

$c=\sqrt[4]{0.064}=\sqrt[4]{(0.4)^3}=0.4^{\frac{3}{4}}=(0.4)^{\frac{9}{12}}$

∵ $\frac{9}{12}>\frac{8}{12}>\frac{6}{12}$ 且底 $0.4<1$

⇒ $(0.4)^{\frac{9}{12}}<(0.4)^{\frac{8}{12}}<(0.4)^{\frac{6}{12}}$

∴ $c<a<b$

練習 1 答 $b>c>a$

解 由 $a=5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{6}{12}}$，$b=(5^3)^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{3}{4}}=5^{\frac{9}{12}}$，$c=(25)^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{3}}=5^{\frac{8}{12}}$

∵ $\frac{9}{12}>\frac{8}{12}>\frac{6}{12}$ 且底 $5>1$ ⇒ $(5)^{\frac{9}{12}}>(5)^{\frac{8}{12}}>(5)^{\frac{6}{12}}$

∴ $b>c>a$

9-5 範例 2 答 $b<a<c$

解 利用 $\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[mr]{a^{nr}}$

$a=\sqrt[9]{25}=\sqrt[18]{25^2}=\sqrt[18]{625}$，$b=\sqrt{2}=\sqrt[18]{2^9}=\sqrt[18]{512}$

$c=\sqrt[3]{3}=\sqrt[18]{3^6}=\sqrt[18]{729}$

∴ $b<a<c$

練習 2 答 $b<a<c$

解 利用 $\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[mr]{a^{nr}}$

$a=\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$，$b=\sqrt[6]{6}$，$c=\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$

∴ $b<a<c$

範例 3 答 $x<-3$ 或 $x>2$

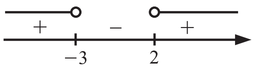
解 原式 ⇒ $5^{2x}<5^{x^2+3x-6}$

∵ 底 $5>1$ ⇒ $2x<x^2+3x-6$

頁

9-5

$\Rightarrow x^2+x-6>0 \Rightarrow (x+3)(x-2)>0$

由 

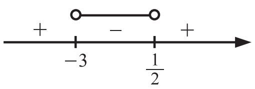
$\therefore x<-3$ 或 $x>2$

練習 3 答 $-3<x<\frac{1}{2}$

解 原式 $\Rightarrow (0.1)^{2x^2+6x}>(0.1)^{x+3}$

$\because$ 底 $0.1<1 \Rightarrow 2x^2+6x<x+3$

$\Rightarrow 2x^2+5x-3<0 \Rightarrow (x+3)(2x-1)<0$

由  $\therefore -3<x<\frac{1}{2}$

範例 4 答 (1) $x<-1$　(2)① x 為任意實數　②無解

解 (1) 原式 $\Rightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^{2x}-5\left(\frac{1}{6}\right)^{x}-6>0$

$\Rightarrow \left[\left(\frac{1}{6}\right)^{x}+1\right]\left[\left(\frac{1}{6}\right)^{x}-6\right]>0$

$\because \left(\frac{1}{6}\right)^{x}>0 \Rightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^{x}+1>0$

即 $\left(\frac{1}{6}\right)^{x}-6>0 \Rightarrow 6^{-x}>6$

$\because$ 底 $6>1 \Rightarrow -x>1$，$\xrightarrow{\times(-1)} x<-1$

(2) ① $\because 2^x>0 \Rightarrow 2^x+3$ 恆大於 0　$\therefore x$ 為任意實數

② $2^x>0 \Rightarrow 2^x+1$ 恆大於 $0 \Rightarrow 2^x+1<0$ 無解

練習 4 答 (1) $x<2$　(2)無解

解 (1) 原式 $\Rightarrow (3^x)^2-5\times3^x-36<0$

$\Rightarrow (3^x+4)(3^x-9)<0$

$\because 3^x+4>0$，即 $3^x-9<0 \Rightarrow 3^x<3^2$

$\because$ 底 $3>1$　$\therefore x<2$

(2) $\because \left(\frac{1}{2}\right)^{x}>0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x}+2$ 恆大於 0

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x}+2\le 0$ 無解

9-6

範例 5 答 9

解 $2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=(2+\sqrt{3})^{-1}$

原式 $\Rightarrow (2+\sqrt{3})^{2x-3}=[(2+\sqrt{3})^{-1}]^{-x-6}$

$\Rightarrow (2+\sqrt{3})^{2x-3}=(2+\sqrt{3})^{x+6}$

即 $2x-3=x+6$　$\therefore x=9$

練習 5 答 -9

解 原式 $\Rightarrow \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{-x+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-3x-7}$

即 $-2x+2=-3x-7$　$\therefore x=-9$

範例 6 答 2

解 原式 $\Rightarrow \begin{cases}10^{m+n}=10^4\\5^{2n+4}=5^{m+3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m+n=4\ \cdots\cdots\text{①}\\2n+4=m+3\cdots\cdots\text{②}\end{cases}$

$\xrightarrow{\text{由①，②}} m=3$，$n=1$　$\therefore m-n=2$

練習 6 答 6

解 原式 $\Rightarrow \begin{cases}2^{2x+4}=2^{3y+6}\\5^{2x}=5^{2y+4}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x+4=3y+6\ \cdots\cdots\text{①}\\2x=2y+4\cdots\cdots\text{②}\end{cases}$

頁

9-6

$\xrightarrow{\text{由①，②}} y=2$，$x=4$　$\therefore x+y=6$

範例 7 答 -2 或 1

解 原式 $\Rightarrow 2^2\times(2^x)^2-9\times2^x+2=0$

$\Rightarrow (4\times2^x-1)\times(2^x-2)=0 \Rightarrow 2^x=\frac{1}{4}$ 或 2

$\therefore x=-2$ 或 1

練習 7 答 -1 或 0

解 原式 $\Rightarrow 3^2\times3^{x^2}-12\times3^x+3=0$

$\Rightarrow (9\times3^x-3)\times(3^x-1)=0 \Rightarrow 3^x=\frac{1}{3}$ 或 1

$\therefore x=-1$ 或 0

9-7

範例 8 答 6

解 $f(a)=4 \Rightarrow 2^a=4$，$f(b)=3 \Rightarrow 2^b=3$

$\therefore f(2a+b-3)=2^{(2a+b-3)}=(2^a)^2\times2^b\times2^{-3}$

$=4^2\times3\times\frac{1}{8}=6$

練習 8 答 8

解 $\because f(a)=3^a=2$，$f(b)=3^b=4$

$\therefore f(a+b)=3^{a+b}=3^a\times3^b=2\times4=8$

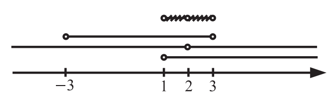
▣ 9－3　對數

9-8

範例 1 答 $1<x<3$，但 $x\ne2$

解 $\because$ 有意義 $\Rightarrow \begin{cases}x-1>0 \Rightarrow x>1\cdots\text{①}\\x-1\ne1 \Rightarrow x\ne2\cdots\cdots\text{②}\\9-x^2>0 \Rightarrow x^2-9<0\end{cases}$

$\Rightarrow (x+3)(x-3)<0 \Rightarrow -3<x<3\cdots\cdots$③

由①∩②∩③ 

$\therefore 1<x<3$，但 $x\ne2$

練習 1 答 (C)

解 $\because \log_a b$ 有意義 $\Rightarrow \begin{cases}a>0，a\ne1\\b>0\end{cases}$

$\therefore$ 選(C)

範例 2 答 2

解 原式 $\Rightarrow x^{\frac{3}{2}}=\sqrt[4]{64}=\sqrt[4]{2^6}=2^{\frac{3}{2}}$　$\therefore x=2$

練習 2 答 $\frac{5}{2}$

解 令 $\log_9 243=x \Rightarrow 9^x=243 \Rightarrow 3^{2x}=3^5$

即 $2x=5$　$\therefore x=\frac{5}{2}$

範例 3 答 1

解 原式 $=\log50+\log(3^3)^{\frac{1}{3}}-\log105+\log(7^2)^{\frac{1}{2}}$

$=\log50+\log3-\log105+\log7=\log\frac{50\times3\times7}{105}$

$=\log10=1$

練習 3 答 3

解 原式 $=\log150+\log4-\log0.6=\log\frac{150\times4}{0.6}$

$=\log1000=\log10^3=3$

9-9

範例 4 答 $\frac{29}{6}$

頁

9-9 解 原式 $=\log_{3^{\frac{1}{2}}}3^2+\log_7 7^{\frac{2}{3}}+\log_{2^3}2^{\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{2}{\frac{1}{2}}\log_3 3+\dfrac{2}{3}\log_7 7+\dfrac{\frac{1}{2}}{3}\log_2 2=4+\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{29}{6}$

練習 4 答 $\mathbf{\frac{1}{2}}$

解 原式 $=3\log_{10}10^{-1}+\log_3 3^{\frac{1}{2}}-\log_{2^{-1}}2^3$

$=-3+\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{3}{-1}\right)=\dfrac{1}{2}$

範例 5 答 **5**

解 原式 $=(\log_2 3+\log_{2^2}3^2)(\log_3 2^2+\log_{3^2}2^1)$

$=(\log_2 3+\dfrac{2}{2}\log_2 3)(2\log_3 2+\dfrac{1}{2}\log_3 2)$

$=2\log_2 3\times\dfrac{5}{2}\log_3 2=5$

練習 5 答 $\mathbf{\frac{3}{4}}$

答 原式 $=(\log_3 5-\log_{3^2}5^{-1})(\log_{5^2}3^{-1}+\log_5 3)$

$=(\log_3 5-\dfrac{(-1)}{2}\log_3 5)(\dfrac{-1}{2}\log_5 3+\log_5 3)$

$=\dfrac{3}{2}\log_3 5\times\dfrac{1}{2}\log_5 3=\dfrac{3}{4}$

範例 6 答 $\mathbf{\frac{12}{5}}$

解 $\because\ \log_5 2=a\ \Rightarrow\ 5^a=2$，$\log_5 3=b\ \Rightarrow\ 5^b=3$

$\therefore\ 5^{(2a+b-1)}=5^{2a}\times5^b\times5^{-1}=(5^a)^2\times3\times\dfrac{1}{5}$

$=2^2\times3\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{12}{5}$

練習 6 答 **90**

解 $\because\ \log_3 2=a\ \Rightarrow\ 3^a=2$，$\log_3 5=b\ \Rightarrow\ 3^b=5$

$\therefore\ 3^{a+b+2}=3^a\times3^b\times3^2=2\times5\times9=90$

範例 7 答 (1) **5** (2) **15**

解 (1) 原式 $=3^{(\log_3 15-\log_3 3)}=3^{\log_3\frac{15}{3}}=3^{\log_3 5}=5$

(2) 原式 $=8+25^{\log_{5^2}(\sqrt{7})^2}=8+25^{\log_{25}7}=8+7=15$

練習 7 答 (1) **25** (2) **8**

解 (1) 原式 $=9^{\log_3 5}=9^{\log_{3^2}5^2}=9^{\log_9 25}=25$

(2) 原式 $=5^{\log_5 3}+3^{\log_3 5}=3+5=8$

9-10 範例 8 答 $\mathbf{-5}$

解 $\log_{5^{-1}}2^5\times\log_7 5^2\times\log_{2^4}7^2=\dfrac{5}{-1}\log_5 2\times2\log_7 5\times\dfrac{2}{4}\log_2 7$

$=-5\log_2 7\times\log_7 5\times\log_5 2=-5$

練習 8 答 **4**

解 原式 $=\log_3 7\times\log_5 3^4\times\log_7 5=4\times\log_3 7\times\log_7 5\times\log_5 3$

$=4$

範例 9 答 $\mathbf{-7}$

解 原式 $=\log_2(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\cdots\times\dfrac{127}{128})$

$=\log_2\dfrac{1}{128}=\log_2 2^{-7}=-7$

練習 9 答 **6**

解 原式 $=\log_2(\dfrac{2}{1}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\cdots\times\dfrac{64}{63})=\log_2 64$

$=\log_2 2^6=6$

頁

9-10 範例 10 答 $\mathbf{\frac{1}{2}}$

解 原式 $=\log_4(\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}})$

$=\log_4[(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{5}-1)]=\log_4 2=\log_{2^2}2^1=\dfrac{1}{2}$

練習 10 答 **2**

解 原式 $=\log_2(\sqrt{9+2\sqrt{20}}-\sqrt{9-2\sqrt{20}})$

$=\log_2[(\sqrt{5}+\sqrt{4})-(\sqrt{5}-\sqrt{4})]=\log_2 4=2$

範例 11 答 $\mathbf{a+1+\frac{1}{b}}$

解 $\because\ \log_5 3=b\ \Rightarrow\ \log_3 5=\dfrac{1}{\log_5 3}=\dfrac{1}{b}$

$\therefore\ \log_3 30=\log_3(2\times3\times5)=\log_3 2+\log_3 3+\log_3 5$

$=a+1+\dfrac{1}{b}$

練習 11 答 $\mathbf{\frac{2a+b}{1-a}}$

解 $\because\ \log5=\log\dfrac{10}{2}=\log10-\log2=1-\log2$

$\therefore\ \log_5 12=\dfrac{\log12}{\log5}=\dfrac{\log(2^2\times3)}{1-\log2}=\dfrac{2\log2+\log3}{1-a}=\dfrac{2a+b}{1-a}$

▣ 9－4 對數函數及其圖形

9-12 範例 1 答 $\boldsymbol{c<b<a}$

解 $\because\ a=\log_{\sqrt{2}}5=\log_{(\sqrt{2})^2}5^2=\log_2 25$

$b=\log_{0.5}0.2=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{5}=\log_{2^{-1}}5^{-1}=\log_2 5$

$c=\log_{\frac{1}{2}}2=\log_{2^{-1}}2=-\log_2 2=\log_2 2^{-1}=\log_2\dfrac{1}{2}$

$\because\ \dfrac{1}{2}<5<25$，且底 $2>1$

$\Rightarrow\ \log_2\dfrac{1}{2}<\log_2 5<\log_2 25$

$\therefore\ c<b<a$

練習 1 答 $\boldsymbol{a<b<c}$

解 $\because\ a=\log_3 5$

$b=\log_{\sqrt{3}}\sqrt{6}=\log_{(\sqrt{3})^2}(\sqrt{6})^2=\log_3 6$

$c=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{7}=\log_{3^{-1}}7^{-1}=\log_3 7$

$\because\ 5<6<7$ 且底 $3>1\Rightarrow\ \log_3 5<\log_3 6<\log_3 7$

$\therefore\ a<b<c$

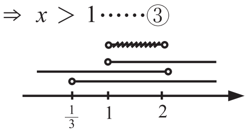
範例 2 答 $\mathbf{1<x<2}$

解 (1) 真數 $\begin{cases}3x-1>0\Rightarrow x>\dfrac{1}{3}\cdots\cdots①\\ 4-2x>0\Rightarrow x<2\ \cdots\cdots②\end{cases}$

(2) $\because$ 底 $\dfrac{1}{5}<1\ \Rightarrow\ 3x-1>4-2x$

$\Rightarrow\ 5x>5\ \Rightarrow\ x>1\cdots\cdots③$

由①∩②∩③



$\therefore\ 1<x<2$

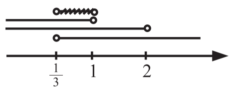
練習 2 答 $\mathbf{\frac{1}{3}<x<1}$

頁

9-12 解 (1) 真數 $\begin{cases} 3x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{3} \cdots\cdots ① \\ 4-2x>0 \Rightarrow x<2 \cdots\cdots ② \end{cases}$

(2) ∵ 底 5 > 1 ⇒ $3x-1<4-2x \Rightarrow x<1 \cdots\cdots ③$

由①∩②∩③



∴ $\frac{1}{3}<x<1$

範例 3 答 $1>x>\frac{1}{5}$

解 原式 ⇒ $\log_3(\log_{\frac{1}{5}}x)<\log_3 1$

∵ $\xrightarrow{底3>1}$ $0<\log_{\frac{1}{5}}x<1$ 真數

容易忘記，要特別小心！

即 $\log_{\frac{1}{5}}1<\log_{\frac{1}{5}}x<\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{5}$

∵ 底 $\frac{1}{5}<1 \Rightarrow 1>x>\frac{1}{5}$

（要變號！）

練習 3 答 $0<x<\frac{1}{5}$

解 原式 ⇒ $\log_3(\log_{\frac{1}{5}}x)>\log_3 1$

∵ 底 3 > 1 ⇒ $\log_{\frac{1}{5}}x>1$，即 $\log_{\frac{1}{5}}x>\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{5}$

∵ 底 $\frac{1}{5}<1 \Rightarrow 0<x<\frac{1}{5}$

要變號　　真數莫忘了！

9-13 **範例 4** 答 $\frac{1}{2}<x<1$

解 (1) 真數 $\begin{cases} 2x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2} \cdots\cdots ① \\ x>0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

(2) 化同底

原式 ⇒ $\log_{(\frac{1}{2})^2}(2x-1)^2>\log_{\frac{1}{4}}x$

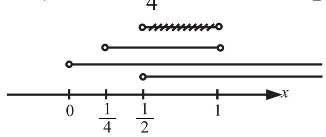
即 $\log_{\frac{1}{4}}(2x-1)^2>\log_{\frac{1}{4}}x$

∵ 底 $\frac{1}{4}<1$（要變號）

⇒ $(2x-1)^2<x \Rightarrow 4x^2-5x+1<0$

⇒ $(4x-1)(x-1)<0 \Rightarrow \frac{1}{4}<x<1 \cdots\cdots ③$

由①∩②∩③



∴ $\frac{1}{2}<x<1$

練習 4 答 $2<x<4$

解 (1) 真數 $\begin{cases} x-1>0 \Rightarrow x>1 \cdots\cdots ① \\ x-2>0 \Rightarrow x>2 \cdots\cdots ② \end{cases}$

(2) 化同底

原式 ⇒ $\log_6(x-1)+\log_6(x-2)<\log_6 6$

⇒ $\log_6(x-1)(x-2)<\log_6 6$

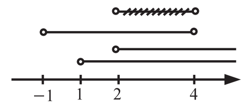
∵ 底 6 > 1

⇒ $(x-1)(x-2)<6 \Rightarrow x^2-3x-4<0$

⇒ $(x+1)(x-4)<0 \Rightarrow -1<x<4 \cdots\cdots ③$

由①∩②∩③

頁



∴ $2<x<4$

9-13 **範例 5** 答 3

解 原式 ⇒ $\log_3(2x-5)=\log_3 x-\log_3 3$

⇒ $\log_3(2x-5)=\log_3\frac{x}{3}$，即 $2x-5=\frac{x}{3} \Rightarrow x=3$

代入真數檢驗 $\begin{cases} 2x-5=2\times3-5>0（合） \\ x=3>0（合） \end{cases}$

∴ $x=3$

練習 5 答 3

解 原式 ⇒ $\log_7(x+4)(x-2)=\log_7 7$

即 $(x+4)(x-2)=7$

⇒ $x^2+2x-15=0 \Rightarrow (x+5)(x-3)=0 \Rightarrow x=-5$ 或 3

代入真數檢驗

	x	-5	3
真數	$x+4$	-1（不合）	7（合）
	$x-2$		1（合）

∴ $x=3$

9-14 **範例 6** 答 3

解 化同底

原式 ⇒ $\log_{\frac{1}{9}}(x+1)=\log_{(\frac{1}{3})^2}(x-1)^2$

即 $(x+1)=(x-1)^2 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow x=0$ 或 3

代入真數檢驗 ⇒ $x=0$（不合），$x=3$（合）

∴ $x=3$

練習 6 答 1

解 化同底

原式 ⇒ $\log_{0.09}(x+8)=\log_{(0.3)^2}(x+2)^2$

即 $(x+8)=(x+2)^2 \Rightarrow x^2+3x-4=0$

⇒ $(x+4)(x-1)=0 \Rightarrow x=-4$ 或 1

代入真數檢驗 ⇒ $x=-4$（不合），$x=1$（合）

∴ $x=1$

範例 7 答 13

解 由 $\log_3 x+\log_3 y=\log_3 xy=3 \Rightarrow xy=3^3=27$

∵ $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=115+2\times27=169$

⇒ $x+y=\pm\sqrt{169}=\pm13$

（∵真數 $x>0$，$y>0$　∴-13 不合）

∴ $x+y=13$

練習 7 答 2

解 ∵ $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy \Rightarrow 28^2=584+2xy \Rightarrow xy=100$

∴ $\log x+\log y=\log xy=\log 100=2$

範例 8 答 $\frac{1}{2}$ 或 8

解 令 $\log_2 x=t \Rightarrow \log_x 2=\frac{1}{t}$

原式 ⇒ $\log_2 x-\log_x 2^3=2 \Rightarrow \log_2 x-3\log_x 2=2$

即 $t-3\times\frac{1}{t}=2 \Rightarrow t^2-2t-3=0 \Rightarrow (t+1)(t-3)=0$

⇒ $t=-1$ 或 3，即 $\log_2 x=-1$ 或 3

∴ $x=2^{-1}$ 或 2^3，即 $\frac{1}{2}$ 或 8（均合）

頁

9-14 練習8 答 3 或 $\frac{1}{27}$

解 令 $\log_3 x=t \Rightarrow \log_x 3=\frac{1}{t}$

原式 $\Rightarrow \log_3 x-3\log_x 3=-2$

即 $t-3\times\frac{1}{t}=-2 \Rightarrow t^2+2t-3=0$

$\Rightarrow (t-1)(t+3)=0 \Rightarrow t=1$ 或 -3

即 $\log_3 x=1$ 或 -3 ∴ $x=3^1$ 或 3^{-3}

即 3 或 $\frac{1}{27}$（均合）

範例9 答 $\frac{1}{100}$ 或 100

解 同取對數 $\log_{10}$

$\Rightarrow \log_{10} x^{(\log_{10} x)}=\log_{10}10000 \Rightarrow (\log_{10} x)(\log_{10} x)=4$

$\Rightarrow (\log_{10} x)^2=4 \Rightarrow \log_{10} x=\pm 2 \Rightarrow x=10^{-2}$ 或 10^2

即 $x=\frac{1}{100}$ 或 100（均合）

練習9 答 $\frac{1}{9}$ 或 9

解 同取對數 $\log_3 \Rightarrow \log_3 x^{(\log_3 x)}=\log_3 81$

$\Rightarrow (\log_3 x)(\log_3 x)=4 \Rightarrow (\log_3 x)^2=4 \Rightarrow \log_3 x=\pm 2$

$\Rightarrow x=3^{-2}$ 或 3^2

∴ $x=\frac{1}{9}$ 或 9（均合）

▣ 9－5 常用對數及其應用

9-15 範例1 答 (1)首數為 -8，尾數為 0.717 (2)第 8 位

解 ∵ $\log x=-7.283=-8+0.717$

(1) ∴ 首數為 -8，尾數為 0.717

(2) 第 $|-8|=8$ 位

練習1 答 (1)首數為 5，尾數為 0.268 (2)有 6 位

解 ∵ $\log x=5+0.268$

(1) ∴首數為 5，尾數為 0.268

(2) x 之整數部分有 $5+1=6$ 位數

範例2 答 $x=4350$，$y=0.00435$

解 (1) ∵ $\log x=3+0.6385$

$=\log 10^3+\log 4.35=\log 4.35\times 10^3=\log 4350$

∴ $x=4350$

(2) ∵ $\log y=-2.3615=-3+0.6385$

$=\log 10^{-3}+\log 4.35=\log 4.35\times 10^{-3}=\log 0.00435$

∴ $y=0.00435$

練習2 答 (1) 3.7513 (2) -2.2487

解 (1) $\log 5640=\log 5.64\times 10^3$

$=\log 5.64+\log 10^3=0.7513+3=3.7513$

(2) $\log 0.00564=\log 5.64\times 10^{-3}$

$=\log 5.64+\log 10^{-3}=0.7513+(-3)=-2.2487$

9-16 範例3 答 71

解 (1) ∵ $\log 6^{90}=90\ \log 6=90(\log 2+\log 3)$

$=90\times(0.301+0.4771)=70.029$

$\Rightarrow 6^{90}$ 有 $70+1=71$ 位數

(2) ∵ $\log 3^{50}=50\ \log 3=50\times 0.4771=23.859$

頁

9-16 $\Rightarrow 3^{50}$ 有 $23+1=24$ 位數

由(1)，(2) $\Rightarrow (6^{90}+3^{50})$ 有 71 位數

（註：∵ 3^{50} 只有 24 位數，不影響到 6^{90} 之 71 位數

∴ 兩數相加後仍只有 71 位數）

練習3 答 42

解 先求 $\log 5=1-\log 2=0.699$

∵ $\log 5^{60}=60\ \log 5=60\times 0.699=41.92$

∴ 有 $41+1=42$ 位數

範例4 答 16

解 ∵ $\log\left(\frac{1}{2}\right)^{50}=\log 2^{-50}=-50\times\log 2$

$=-50\times 0.301=-15.05=-16+0.95$

∴ 第 $|-16|=16$ 位開始

練習4 答 41

解 $\log 5=1-\log 2=0.699$

∵ $\log\left(\frac{1}{5}\right)^{60}=\log 5^{-60}=-60\times\log 5$

$=-60\times 0.699=-41.94=-42+0.06$

$\Rightarrow$ 自小數點後第 $|-42|=42$ 位開始不為 0，即小數點後連續有 41 個0

範例5 答 28

解 ∵ 5^{60} 為 42 位數 $\Rightarrow \log 5^{60}=41+\alpha$（其中 $0\le\alpha<1$）

即 $41\le\log 5^{60}<42 \Rightarrow 41\le 60\ \log 5<42$

$\xrightarrow{\div 60}$ $0.683\cdots\le\log 5<0.7$

$\xrightarrow{\times 40}$ $27.3\le 40\ \log 5<28$

即 $27.3\le\log 5^{40}<28 \Rightarrow \log 5^{40}$ 之首數為 27

∴ 5^{40} 有 $27+1=28$ 位數

〈速算法〉$\frac{40}{60}\times 42=28$

練習5 答 26

解 ∵ 7^{100} 為 85 位數 $\Rightarrow \log 7^{100}=84+\alpha$（其中 $0\le\alpha<1$）

即 $84\le\log 7^{100}<85$

$\xrightarrow{\div 100}$ $0.84\le\log 7<0.85$，$\xrightarrow{\times 30}$ $25.2\le\log 7^{30}<25.5$

$\Rightarrow \log 7^{30}$ 之首數為 25

∴ 7^{30} 有 $25+1=26$ 位數

〈速算法〉$\frac{30}{100}\times 85=25.5$，即 $25+1=26$ 位

9-17 範例6 答 7

解 $\left(\frac{1}{6}\right)^n<10^{-5} \Rightarrow \log 6^{-n}<\log 10^{-5} \Rightarrow -n\log 6<-5$

$\Rightarrow -n(\log 2+\log 3)<-5$

$\Rightarrow -n\times(0.301+0.4771)<-5$

$\Rightarrow -0.7781n<-5 \Rightarrow n>\frac{-5}{-0.7781}$

即 $n>6.42$ ∴最小正整數 n 為 7

練習6 答 12

解 $\log 5=1-\log 2=0.699$

∵ $5^n>10^8 \Rightarrow \log 5^n>\log 10^8 \Rightarrow n\times\log 5>8$

$\Rightarrow n\times 0.699>8 \Rightarrow n>11.44\cdots$

∴最小正整數 n 為 12

頁

精選實力評量

一 基礎部分

9-17 ~ 9-20

1.C	2.C	3.A	4.A	5.B	6.C	7.D	8.B	9.C	10.C
11.A	12.C	13.C	14.B	15.C	16.A	17.C	18.B	19.C	20.B
21.D	22.C	23.B	24.D	25.B	26.D	27.C	28.A	29.B	30.A
31.C	32.A	33.C	34.D	35.B	36.C	37.B	38.B	39.C	40.D
41.A	42.D	43.B	44.B	45.C	46.A	47.A	48.C	49.C	50.D
51.B	52.C	53.B	54.B	55.B	56.D	57.A	58.C	59.B	60.B
61.C	62.C								

9-17 解 1. 原式 $=5^{(a-b)+(b-c)+(c-a)}=5^0=1$

2. $a=(2^2)^3=2^6$，$b=2^{2^3}=2^8$　$\therefore\ a<b$

3. $2^x\cdot3^y\cdot5^z=(2^2\times3)^{\frac{1}{2}}\times(3^2\times5)^{\frac{2}{3}}=2\times3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{4}{3}}\times5^{\frac{2}{3}}$

$=2\times3^{\frac{11}{6}}\times5^{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow x=1$，$y=\dfrac{11}{6}$，$z=\dfrac{2}{3}$　$\therefore\ xyz=1\times\dfrac{11}{6}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{11}{9}$

4. $a+b\sqrt{2}=(7+5\sqrt{2})^{2010}\times(7-5\sqrt{2})^{2011}$

$=[(7+5\sqrt{2})\cdot(7-5\sqrt{2})]^{2010}\times(7-5\sqrt{2})$

$=(49-50)^{2010}\times(7-5\sqrt{2})=7-5\sqrt{2}$

$\Rightarrow\ a=7$，$b=-5$

$\therefore\ a+b=7+(-5)=2$

5. $(27)^x=\dfrac{\sqrt{3}}{243}\ \Rightarrow\ 3^{3x}=\dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{3^5}\ \Rightarrow\ 3^{3x}=3^{\frac{1}{2}-5}$

即 $3x=\dfrac{1}{2}-5$　$\therefore\ x=-\dfrac{3}{2}$

6. $\because(2+\sqrt{3})^x=\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x=(2-\sqrt{3})^{-x}$

原式 $\Rightarrow\ (2-\sqrt{3})^{x-6}=(2-\sqrt{3})^{-x}$

即 $x-6=-x$　$\therefore\ x=3$

7. $(0.0625)^{-2.5}=[(0.5)^4]^{-2.5}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-10}=2^{10}=1024$

8. (A) $a^x<a^y\ \xrightarrow{\because a>1}\ x<y$

(B) $a^x<a^y\ \xrightarrow{\because 0<a<1}\ x>y$

(C)如 $4^{\frac{1}{2}}>1^{\frac{1}{2}}\ \Rightarrow\ 4>1$

(D) $a>b>1$，且 $a^x=b^y\ \Rightarrow\ x<y$

$\therefore$ 選(B)

9. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}}}=\dfrac{1}{\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{1}{x^{\frac{1}{24}}}=x^{-\frac{1}{24}}$

10. $f(a)=5^a=2$，$f(b)=5^b=3$

$\therefore\ f(2a-b)=5^{2a-b}=\dfrac{(5^a)^2}{5^b}=\dfrac{2^2}{3}=\dfrac{4}{3}$

9-18 11. $a=\sqrt[3]{9}=3^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{40}{60}}$，$b=\sqrt[5]{81}=3^{\frac{4}{5}}=3^{\frac{48}{60}}$

$c=\sqrt[4]{27}=3^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{45}{60}}$

$\because\ \dfrac{48}{60}>\dfrac{45}{60}>\dfrac{40}{60}$，且 $3>1\ \Rightarrow\ 3^{\frac{48}{60}}>3^{\frac{45}{60}}>3^{\frac{40}{60}}$

即 $b>c>a$

頁

9-18 12. $\because\ \log_5 2=a\ \Rightarrow\ 5^a=2$，$\log_5 3=b\ \Rightarrow\ 5^b=3$

$\therefore\ 5^{a+2b-1}=5^a\times(5^b)^2\times5^{-1}=2\times3^2\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{18}{5}$

13. 利用算幾不等式 $\Rightarrow\ \dfrac{2^x+2^{-x}}{2}\geq\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}$

$\Rightarrow\ 2^x+2^{-x}\geq2\ \Rightarrow\ 2^x+2^{-x}+4\geq6$

$\therefore$ 最小值為 6

14. $4^x=3\ \Rightarrow\ (2^x)^2=3$

$\Rightarrow\ 2^x=\pm\sqrt{3}$（$-\sqrt{3}$ 不合，$\because\ 2^x>0$）

$\therefore\ 8^x=(2^3)^x=(2^x)^3=(\sqrt{3})^3=3\sqrt{3}$

15. $3^{x^2-2x}<(3^{-2})^{-x-\frac{5}{2}}\ \Rightarrow\ 3^{x^2-2x}<3^{2x+5}$

即 $x^2-2x<2x+5\ \Rightarrow\ x^2-4x-5<0$

$\Rightarrow\ (x+1)(x-5)<0$

$\therefore\ -1<x<5$

16. $a=\sqrt[4]{\dfrac{27}{8}}=\sqrt[4]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^3}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{9}{12}}$

$b=\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{8}{12}}$

$\Rightarrow\ a>b$

又 $b=\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}=\sqrt[3]{\dfrac{18}{8}}>\sqrt[3]{\dfrac{15}{8}}\ \Rightarrow\ b>c$

$\therefore\ a>b>c$

17. (A)過點 $(0,1)$

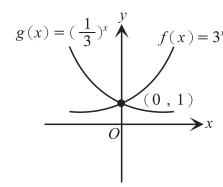
(B) 1 個交點

(C) f 與 g 對稱於 y 軸

(D) $f(x)\cdot g(x)=3^x\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

$=\left(3\times\dfrac{1}{3}\right)^x=1^x=1$

$\therefore$ 選(C)



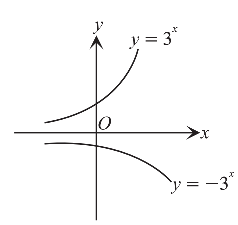
18. 〈法一〉$\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^{3x}+a^{-3x}}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-1+a^{-2x})}$

$=\dfrac{1}{a^{2x}-1+\dfrac{1}{a^{2x}}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}-1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}}}=\dfrac{3}{7}$

〈法二〉$\dfrac{(a^x+a^{-x})\times a^x}{(a^{3x}+a^{-3x})\times a^x}=\dfrac{a^{2x}+1}{a^{4x}+a^{-2x}}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{3}+1}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}}=\dfrac{3}{7}$

19.



20. 原式 $\Rightarrow(5^x)^2+4\times5^x-45=0$

$\Rightarrow(5^x+9)(5^x-5)=0$

$\Rightarrow\ 5^x=-9$（不合 $\because\ 5^x>0$）或 5

$\therefore\ x=1$

頁

9-18

21. $a=2^{18}=(2^3)^6=8^6$，$b=7^6$，$c=3^{12}=(3^2)^6=9^6$

$\therefore\ c>a>b$

22. (C)代 $x=0 \Rightarrow y=3^{0+1}=3$ $\therefore$ 過點$(0,3)$

23. 原式$=\log_{11}12\times\log_{12}11\times\log_8 9\times\log_9 10\times\log_{10}16$

$=1\times\log_8 16=\log_{2^3}2^4=\dfrac{4}{3}$

24. $a=10^{\sqrt{2}}\doteqdot 10^{1.414\cdots}$

$b=(0.1)^{-\frac{3}{2}}=(10^{-1})^{-\frac{3}{2}}=10^{\frac{3}{2}}=10^{1.5}$

$c=10^1$

$\because \xrightarrow{\text{底 } 10>1}$ $b>a>c$

25. $\because\ x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=4^3-3\times4=52$

$\therefore\ \log_7\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}-3\right)=\log_7(52-3)=\log_7 7^2=2$

26. $2^{x-1}=8^y=2^{3y} \Rightarrow x-1=3y \Rightarrow x-3y=1$……①

又 $9^x=3^{4y+4} \Rightarrow 3^{2x}=3^{4y+4}$

即 $2x=4y+4 \Rightarrow x-2y=2$……②

②−① $\Rightarrow y=1$，代入① $x=4$

$\therefore\ x-y=3$

27. 代 $x=-1 \Rightarrow y=a^{-1+1}+1=a^0+1=1+1=2$

$\therefore$ 必過點$(-1,2)$

9-19

28. 原式$=\log_3\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\cdots\cdots\times\dfrac{80}{81}\right)$

$=\log_3\dfrac{1}{81}=\log_3 3^{-4}=-4$

29. $s=10000\cdot(1+3\%)^{10}=10000\times1.3439=13439$

30. $\log_{10}45=\log_{10}(3^2\times5)=\log3^2+\log5$

$=2\log3+(1-\log2)=2y+(1-x)=1-x+2y$

31. $\log_a b$ 有意義 $\Rightarrow \begin{cases}\text{真數 } b>0\\ \text{底數 } a>0\text{，}a\neq1\end{cases}$

$\Rightarrow$ (A)，(D)不正確

(B) $\log_3 5^2=2\log_3 5\neq(\log_3 5)^2$

(C) $\log_8 27=\log_{2^3}3^3=\dfrac{3}{3}\log_2 3=\log_2 3$

$\therefore$ 選(C)

32. 原式 $\Rightarrow (2^x)^2+2^x-2=0 \Rightarrow (2^x-1)(2^x+2)=0$

$\Rightarrow 2^x=1$ 或-2（-2 不合 $\because 2^x>0$）

$\therefore\ x=0$

33. 原式$=\log_2(\log_5 16\times\log_2 5)=\log_2(4\log_5 2\times\log_2 5)$

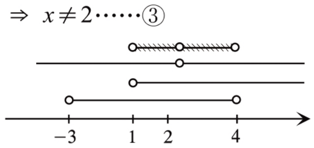
$=\log_2 4=2$

34. 原式$=25^{\log_5\frac{6}{3}}=25^{\log_5 2}=25^{\log_{25}4}=4$

35. $\log_{(x-1)}(12+x-x^2)$ 有意義

$\Rightarrow \begin{cases}12+x-x^2>0 \Rightarrow x^2-x-12<0\\ \qquad\Rightarrow (x-4)(x+3)<0\\ \qquad\Rightarrow -3<x<4\text{……①}\\ x-1>0 \Rightarrow x>1\text{……②}\\ x-1\neq1 \Rightarrow x\neq2\text{……③}\end{cases}$

由①∩②∩③



頁

9-19

$\Rightarrow 1<x<4$ 但 $x\neq2$ $\therefore$ 整數 $x=3$

36. $5^n>10^5 \Rightarrow \log5^n>\log10^5 \Rightarrow n\log5>5$

$\Rightarrow n(1-\log2)>5 \Rightarrow 0.699n>5$

$\Rightarrow n>\dfrac{5}{0.699}=7.15\cdots$ $\therefore$ 最小正整數 n 為 8

37. 真數 $10-x>0 \Rightarrow x<10$…①

又 $\log_3(10-x)<1$，即 $\log_3(10-x)<\log_3 3$

$\Rightarrow 10-x<3 \Rightarrow x>7$…②

由①∩② $\Rightarrow 7<x<10$

$\therefore$ 整數 x 為 8，9 共 2 個

38. $\log\dfrac{1}{\sqrt[3]{A}}=\log A^{-\frac{1}{3}}=-\dfrac{1}{3}\log A=-\dfrac{1}{3}\times3.69=-1.23$

$=-2+0.77$

$\therefore$ 首數為-2

39. $\log_9(x+\sqrt{7})+\log_9(x-\sqrt{7})=1$

$\Rightarrow \log_9(x+\sqrt{7})\cdot(x-\sqrt{7})=1 \Rightarrow x^2-7=9$

$\Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\pm4$

其中-4 代入真數 $x-\sqrt{7}=-4-\sqrt{7}<0$，不合

$\therefore\ x=4$

40. 原式 $\Rightarrow \log_9(x-1)^2=\log_9(2x+1)$

即$(x-1)^2=2x+1 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x=0$ 或 4

其中 0 代入真數 $x-1=0-1=-1<0$

不合 $\therefore\ x=4$

41. $\because\ \log2^{100}=100\log2=100\times0.301=30.1$

$\Rightarrow 2^{100}$有 $30+1=31$ 位數

而 $\log3^{20}=20\cdot\log3=20\times0.4771=9.542$

$\Rightarrow 3^{20}$有 $9+1=10$ 位數（$\because$ 不影響到 2^{100}之位數）

$\therefore\ 2^{100}+3^{20}$之位數與 2^{100}之位數相同，有 31 位數

42. $\because\ 2\div2\times57.3^\circ=114.6^\circ\in$ II

$\Rightarrow$ 真數 $\cos2<0$，$\sec2<0$

$\Rightarrow \log_{10}\cos2$ 與 $\log_{10}\sec2$ 均無意義

$\therefore$ 選(D)

43. 原式 $\Rightarrow [(0.3)^2]^{x-5}<(0.3)^{x-2}$

$\Rightarrow (0.3)^{2x-10}<(0.3)^{x-2}$

$\because \xrightarrow{\text{底 } 0.3<1} 2x-10>x-2$

$\therefore\ x>8$

44. $x-1=\log131.4-\log10=\log\dfrac{131.4}{10}=\log13.14$

45. 原式$=\log_3 18+\log_3 12-\log_3 2^3=\log_3\dfrac{18\times12}{8}$

$=\log_3 27=3$

46. (A) $\log_5 2>\log_5 1 \Rightarrow \log_5 2>0$

(B) $\log_{0.3}4<\log_{0.3}1 \Rightarrow \log_{0.3}4<0$

(C) $\log_5 4<\log_5 5 \Rightarrow \log_5 4<1$

(D) $\log_{0.5}0.3>\log_{0.5}0.5 \Rightarrow \log_{0.5}0.3>1$

$\therefore$ 選(A)

47. $\because\ abc=1 \Rightarrow \begin{cases}ab=\dfrac{1}{c}=c^{-1}\\ bc=\dfrac{1}{a}=a^{-1}\\ ac=\dfrac{1}{b}=b^{-1}\end{cases}$

頁

9-19

原式 $=\log_a bc+\log_b ac-(\log_c a+\log_c b)$

$=\log_a a^{-1}+\log_b b^{-1}-\log_c ab$

$=-1+(-1)-\log_c c^{-1}=-1+(-1)-(-1)=-1$

48. 原式 $\Rightarrow\ \log_{60}2^a+\log_{60}3^b+\log_{60}5^c=2$

$\Rightarrow\ \log_{60}(2^a\times 3^b\times 5^c)=2$

$\Rightarrow\ 2^a\cdot 3^b\cdot 5^c=60^2=(2^2\times 3^1\times 5^1)^2=2^4\times 3^2\times 5^2$

$\Rightarrow\ a=4$，$b=2$，$c=2$

$\therefore\ a+b+c=8$

49. 原式 $=\log_3\left(\dfrac{15}{2}\right)^4-\log_3\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+\log_3\left(\dfrac{6}{5}\right)^2$

$=\log_3\dfrac{\left(\frac{15}{2}\right)^4\times\left(\frac{6}{5}\right)^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\log_3 3^6=6$

9-20

50. 原式 $=(\log_3 2+\log_{\sqrt{9}}\sqrt{4})\cdot(\log_{2^2}3^1+\log_2 3^2)$

$=2\log_3 2\times(\dfrac{1}{2}\log_2 3+2\cdot\log_2 3)$

$=2\cdot\log_3 2\times\dfrac{5}{2}\cdot\log_2 3=5$

51. $\log_x 27\sqrt{3}=7\ \Rightarrow\ x^7=27\sqrt{3}=3^3\times 3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{7}{2}}=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^7$

$\Rightarrow\ x=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

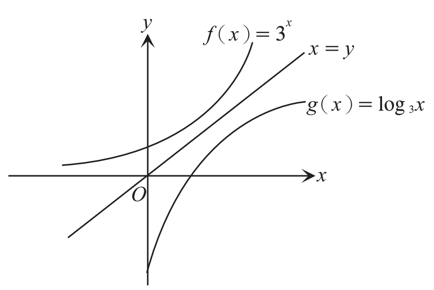
52. 原式 $\Rightarrow\ \log_6(x+2)(x-3)=2$

$\Rightarrow\ x^2-x-6=6^2\ \Rightarrow\ x=-6$ 或 7

其中 -6 代入真數 $x-3=-6-3=-9<0$，不合

$\therefore\ x=7$

53.



對稱於 $x=y$ 之直線

54. $0.00086=8.6\times 10^{-4}$

55. $2<\log_x 50<3$

即 $\log_x x^2<\log_x 50<\log_x x^3\ \Rightarrow\ x^2<50<x^3$

$\Rightarrow\ x=4$，5，6，7

$\therefore$ 共 4 個

56. $\log\left(\dfrac{2}{5}\right)^{20}=20\cdot\log\dfrac{2}{5}=20\cdot(\log 2-\log 5)$

$=20\cdot[\log 2-(1-\log 2)]=20\cdot(2\log 2-1)$

$=-7.96=-8+0.04$

$\Rightarrow$ 首數為 -8

$\therefore$ 第 8 位

57. $\log_x\left(\dfrac{27}{8}\right)=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow\ x^{\frac{3}{2}}=\dfrac{27}{8}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^3=\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}=\left(\dfrac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ x=\dfrac{9}{4}$

頁

9-20

58. $\log\sqrt{33}=0.7593\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{2}\log 33=0.7593$

$\Rightarrow\ \log 33=1.5186\ \Rightarrow\ \log 3.3=0.5186$

$\Rightarrow\ \log 0.33=-1+0.5186$

$\therefore$ 所求尾數為 0.5186

59. $\log 2=0.301\ \Rightarrow\ 10^{0.301}=2$

$\therefore\ 10^{3.301}=10^3\times 10^{0.301}=1000\times 2=2000$

60. $\log_3(\log_8 x)=-1=\log_3 3^{-1}$，即 $\log_8 x=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ x=8^{\frac{1}{3}}=2$

61. $\log 450=2.6532\ \Rightarrow\ \log 4.50=0.6532$

又 $\log M=-2.3468=-3+0.6532=\log 10^{-3}+\log 4.50$

$=\log 4.50\times 10^{-3}=\log 0.0045$

$\therefore\ M=0.0045$

62. $0\le\log_2(\log_3 x)<1$

即 $\log_2 1\le\log_2(\log_3 x)<\log_2 2$

$\Rightarrow\ 1\le\log_3 x<2$

即 $\log_3 3\le\log_3 x<\log_3 3^2$

$\Rightarrow\ 3\le x<3^2\ \Rightarrow\ 3\le x<9$

$\therefore$ 整數 x 有 3，4，5，6，7，8 共 6 個

二 進階部分

9-20 ~ 9-21

1.C　2.B　3.B　4.C　5.D　6.B　7.C　8.B　9.A　10.B

11.C　12.B　13.C　14.C　15.A　16.C　17.A　18.C　19.C

9-20

解 1. 原式 $\Rightarrow\ 3^x+3\times 3^x=7^x+7\times 7^x\ \Rightarrow\ 4\times 3^x=8\times 7^x$

$\Rightarrow\ \dfrac{3^x}{7^x}=\dfrac{8}{4}=2$

2. $f(t)=100^{t+2}=300\ \Rightarrow\ 100^{t+1}\times 100=300$

$\Rightarrow\ 100^{t+1}=3$

$\therefore\ f(2t)=100^{2t+2}=[100^{(t+1)}]^2=3^2=9$

3. $738^x=9=3^2\ \Rightarrow\ 738=3^{\frac{2}{x}}\cdots①$

$82^y=27=3^3\ \Rightarrow\ 82=3^{\frac{3}{y}}\cdots②$

$\dfrac{②}{①}\Rightarrow\ \dfrac{82}{738}=\dfrac{3^{\frac{3}{y}}}{3^{\frac{2}{x}}}\ \Rightarrow\ 3^{-2}=3^{\frac{3}{y}-\frac{2}{x}}$

$\therefore\ \dfrac{3}{y}-\dfrac{2}{x}=-2$

4. 原式 $=\dfrac{(a^x+a^{-x})^3-3(a^x+a^{-x})}{(a^x+a^{-x})^2-2}=\dfrac{4^3-3\times 4}{4^2-2}=\dfrac{26}{7}$

5. $\because(135, 90, 45)=45\ \Rightarrow\ a=2^{135}=(2^3)^{45}=8^{45}$

$b=3^{90}=(3^2)^{45}=9^{45}$，$c=7^{45}$

$\Rightarrow\ b>a>c$

6. $3.6^y=100=10^2\ \Rightarrow\ 3.6=10^{\frac{2}{y}}\cdots①$

$0.36^x=100=10^2\ \Rightarrow\ 0.36=10^{\frac{2}{x}}\cdots②$

$\dfrac{①}{②}\ \Rightarrow\ \dfrac{3.6}{0.36}=10^{\frac{2}{y}-\frac{2}{x}}\ \Rightarrow\ 10^1=10^{2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)}$

即 $1=2\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)$

頁

9-20

$\therefore\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$

7. $2^{-0.26}=2^{-1+0.74}=2^{-1}\times2^{0.7}\times2^{0.04}=\frac{1}{2}ab$

8. $f(\log_3 18)=f(\log_3 6+\log_3 3)=f(\log_3 6+1)$

$=3^{\log_3 6-1}=3^{\log_3 6-\log_3 3}=3^{\log_3\frac{6}{3}}=3^{\log_3 2}=2$

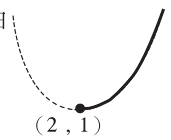
9. 令 $t=2^x+2^{-x}$（其中 $t\geq 2$）

〈說明〉$\because\ \frac{2^x+2^{-x}}{2}\geq\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}\ \Rightarrow\ 2^x+2^{-x}\geq 2$

$\xrightarrow{平方} t^2=4^x+4^{-x}+2\ \Rightarrow\ 4^x+4^{-x}=t^2-2$

$f(x)=(t^2-2)-4t+7=t^2-4t+5=(t-2)^2+1$

但 $t\geq 2$，由



當 $t=2$ 時，$f(x)$ 有最小值為 1

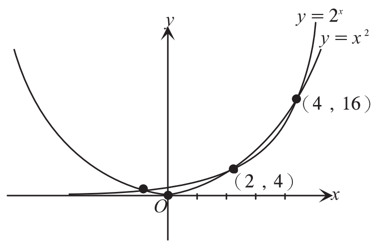
10. 令有原 a 個 $\Rightarrow\ N=a\times2^{50}$

$\xrightarrow{\div16} \frac{N}{16}=\frac{a\times2^{50}}{16}=a\times2^{46}$

$\Rightarrow$ 所求為 46 天後

9-21

11.



由圖 $\Rightarrow$ 有 3 個交點

12. $\sqrt{19+8\sqrt{3}}=\sqrt{19+2\sqrt{48}}=\sqrt{16}+\sqrt{3}=4+\sqrt{3}$

同理 $\sqrt{19-8\sqrt{3}}=4-\sqrt{3}$

原式 $=\log_4[(4+\sqrt{3})+(4-\sqrt{3})]$

$=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}$

13. $\because\ \log_3 7=\frac{1}{\log_7 3}=\frac{1}{b}$

又 $\log_{28}42=\frac{\log_3 42}{\log_3 28}=\frac{\log_3(2\times3\times7)}{\log_3(2^2\times7)}$

$=\frac{\log_3 2+\log_3 3+\log_3 7}{2\log_3 2+\log_3 7}=\frac{a+1+\frac{1}{b}}{2a+\frac{1}{b}}=\frac{ab+b+1}{2ab+1}$

14. $\because\ \log_x 2=\frac{1}{\log_2 x}$

原式 $\Rightarrow\ \log_2 x=4\times\frac{1}{\log_2 x}\ \Rightarrow\ (\log_2 x)^2=4$

$\Rightarrow\ \log_2 x=\pm2\ \Rightarrow\ x=2^2$ 或 $2^{-2}\ \Rightarrow\ x=4$ 或 $\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ 兩根和為 $4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$

15. 原式 $=\log_2(\log_{3^2}7^2)+\log_{2^3}(\log_{7^2}3^2)^3$

$=\log_2(\log_3 7)+\log_2(\log_7 3)$

$=\log_2(\log_3 7\times\log_7 3)=\log_2 1=0$

頁

9-21

16. $\because\ 2^{100}$ 有 31 位數 $\Rightarrow\ 30\leq\log2^{100}<31$

$\Rightarrow\ 30\leq100\log2<31\ \xrightarrow{\div100}\ 0.3\leq\log2<0.31$

$\xrightarrow{\times60}\ 18\leq60\log2<18.6$

即 $18\leq\log2^{60}<18.6$

$\therefore\ 2^{60}$ 有 $18+1=19$ 位數

17. $\because\ \log5=1-\log2\fallingdotseq0.699$

原式同取 log $\Rightarrow\ \log400<\log\left(\frac{5}{4}\right)^n<\log500$

$\Rightarrow\ 2\log2+\log100<n(\log5-\log4)$

$<\log5+\log100$

即 $2\times0.301+2<n(0.699-2\times0.301)<0.699+2$

$\Rightarrow\ 2.602<0.097n<2.699\ \Rightarrow\ 26.82<n<27.82$

$\therefore\ n=27$

18. $\because\ \log_4 x+\log_4 y=2\ \Rightarrow\ \log_4 xy=2$

即 $xy=4^2=16$

再利用算幾不等式

$\Rightarrow\ \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}\geq\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}}\ \Rightarrow\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq2\sqrt{\frac{1}{16}}$

即 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{1}{2}$ $\therefore$ 最小值為 $\frac{1}{2}$

19. 令 k 為整數

依題意 $\Rightarrow\ \log n-\log\frac{1}{n}=k$

$\Rightarrow\ 2\log n=k\ \Rightarrow\ \log n=\frac{k}{2}$，即 $n=10^{\frac{k}{2}}$

由

k	2	3	4
$10^{\frac{k}{2}}$	10 (不合)	$10\sqrt{10}$	100

$\therefore\ n=10\sqrt{10}$ 與 100

歷屆統測題

9-21 ~ 9-22

1. C 2. A 3. A 4. A 5. D 6. A 7. B 8. A 9. D 10. B
11. A 12. C 13. A 14. C 15. D 16. D 17. C 18. D 19. C 20. A
21. A 22. A

9-21

解 1. 原式 $=\log_{(\sqrt{2})^2}\left(\frac{3}{2}\right)^2-\log_2\frac{27}{160\sqrt{2}}+\log_{\sqrt{4}}\sqrt{\frac{36}{25}}$

$=\log_2\frac{9}{4}-\log_2\frac{27}{160\sqrt{2}}+\log_2\frac{6}{5}$

$=\log_2\left(\frac{\frac{9}{4}\times\frac{6}{5}}{\frac{27}{160\sqrt{2}}}\right)=\log_2 2^{\frac{9}{2}}=\frac{9}{2}$

2. $4^a=2^{\frac{1}{2}}\times\sqrt[3]{2^3\times2^{\frac{6}{5}}}$

$\Rightarrow\ 2^{2a}=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{3+\frac{6}{5}}{3}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{7}{5}}=2^{\frac{19}{10}}$

即 $2a=\frac{19}{10}$ $\therefore\ a=\frac{19}{20}$

3. 原式 $\Rightarrow\ \log_9(10x^2-6x+5)=\log_9 x^2+\log_9 9$

$\Rightarrow\ \log_9(10x^2-6x+5)=\log_9 9x^2$

頁 9-21

即 $10x^2-6x+5=9x^2 \Rightarrow x^2-6x+5=0$

$\Rightarrow (x-1)(x-5)=0 \Rightarrow x=1$ 或 5

即 $p=1$，$q=5$　$\therefore \frac{1}{p+q}=\frac{1}{6}$

4. 原式 $\Rightarrow 5^r=4\left(2\sqrt[3]{5}+\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\right)^2=4\left(\frac{5}{2}\sqrt[3]{5}\right)^2$

$=4\times\frac{5^2}{4}\times\sqrt[3]{5^2}=5^2\times5^{\frac{2}{3}}=5^{2+\frac{2}{3}}=5^{\frac{8}{3}}$

$\therefore r=\frac{8}{3}$

5. 真數 $x-2y>0 \Rightarrow x>2y$

原式 $\Rightarrow \log(x-2y)^2=\log xy$

即 $(x-2y)^2=xy \Rightarrow x^2-5xy+4y^2=0$

$\Rightarrow (x-y)(x-4y)=0$

$\Rightarrow x=y$（不合 $\because x>2y$）或 $x=4y$

$\therefore \frac{x}{y}=\frac{4y}{y}=4$

6. 依題意 $\Rightarrow 3^{\alpha}\times3^{\beta}=\frac{1}{81} \Rightarrow 3^{\alpha+\beta}=\frac{1}{3^4}=3^{-4}$

$\therefore \alpha+\beta=-4$

頁 9-22

7.

7^n	末二位數
7^1	07
7^2	49
7^3	43
7^4	01

$\Rightarrow$ 每連續 4 個一循環

由 $2009=4\times502+1$

$\Rightarrow 7^{2009}$ 之末二位數為 7^1，即 07

8. $\log_a b$ 有意義之條件為底數 $a>0$、$a\neq1$；

真數 $b>0 \Rightarrow$ (B)、(C)、(D)不合

$\therefore$ 選(A)

9. $\log a=-1.0282=\underbrace{-2}_{首數}+\underbrace{0.9718}_{尾數}$

$\therefore$ 首數為 -2

10. $a=2^{\log_2 4}=4 \Rightarrow 2^a=2^4=16$

$b=8^{\frac{1}{2}}=(2^3)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2^b=2^{2^{\frac{3}{2}}}=2^3=8$

$c=\log_2 10 \Rightarrow 2^c=10$，得 $2^a>2^c>2^b$

$\xrightarrow{\because 底\ 2>1} a>c>b$

11. 原式 $\Rightarrow \log_a(3\times7)=3 \Rightarrow a^3=21$

$\therefore a=\sqrt[3]{21}$

12. (1) 原式 $\Rightarrow \log_3 xy=2 \Rightarrow xy=3^2=9$

(2) 由算幾不等式

$\Rightarrow \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}\geq\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq2\sqrt{\frac{1}{9}}$

即 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{2}{3}$　$\therefore$ 最小值為 $\frac{2}{3}$

13. 原式 $\Rightarrow 2^{4x-x^2}=2^4$，即 $4x-x^2=4$

$\Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0$

$\therefore x=2$

頁 9-22

14. $(0.0625)^{-1.5}=\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(2^{-4}\right)^{-\frac{3}{2}}=2^6=64$

15. $2^{2x+1}+2^{3x}=5\times2^{x+4}$

$\Rightarrow 2\times(2^x)^2+(2^x)^3=5\times2^4\times2^x$

令 $t=2^x>0 \Rightarrow t^3+2t^3-80t=0$

$\Rightarrow t(t+10)(t-8)=0 \Rightarrow t=8$（其中 0 與 -10 不合）

即 $2^x=2^3$　$\therefore x=3$

16. 依題意 $\Rightarrow 3^a=2$，$3^b=4$

$\therefore f(a+b)=3^{a+b}=3^a\times3^b=2\times4=8$

17. $\log_{10}(10x)=\log_{10}10+\log_{10}x=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

18. $\frac{1}{3^x}=9^y \Rightarrow 3^{-x}=3^{2y}$，即 $-x=2y \Rightarrow x=-2y$

19. $\log_{10}5=1-\log_{10}2=1-a$

$\therefore \log_{10}15=\log_{10}3+\log_{10}5=b+(1-a)=-a+b+1$

20. 原式 $=\left(3^{-3}\right)^3\times\left(3^4\right)^2=3^{-9}\times3^8=3^{-1}=\frac{1}{3}$

21. 原式 $=\log_{10}\left(\frac{3\times50\times7}{105}\right)=\log_{10}10=1$

22. 原式 $\Rightarrow 2^{x^2}\times2^{2x}\times2^4=2^{3x}\times2^6 \Rightarrow 2^{x^2+2x+4}=2^{3x+6}$

即 $x^2+2x+4=3x+6 \Rightarrow x^2-x-2=0$

$\Rightarrow (x+1)(x-2)=0 \Rightarrow x=-1$ 或 2

$\therefore$ 所有解的和為 $-1+2=1$